

**INOVAÇÃO NO ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS:
PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO**
**INOVATION IN THE TEACHING OF COMPLEX NUMBERS:
PROPOSAL OF A DIDACTIC SEQUENCE FOR HIGH SCHOOL**

ISSN: 2674-662X. DOI: 10.29327/2334916.19.2-90

Estela de Lourdes Lima¹

RESUMO

Apesar de sua relevância para diversas áreas da ciência e tecnologia, os números complexos têm sido gradualmente negligenciados no Ensino Médio, muitas vezes reduzidos à simples função de extrair raízes quadradas de números negativos. Este artigo propõe uma sequência didática com o objetivo de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo, buscando torná-lo mais acessível e significativo aos estudantes. A partir de uma abordagem qualitativa e fundamentada em revisão bibliográfica, discute-se como o ensino tradicional da matemática, frequentemente simbólico e descontextualizado, dificulta a compreensão de temas abstratos como os números complexos. Defende-se que a articulação desse conteúdo com diferentes linguagens e áreas do conhecimento matemático pode ampliar as possibilidades de compreensão e aplicação por parte dos alunos.

PALAVRAS-CHAVE: Números complexos, Ensino Médio, Sequência didática, Ensino de Matemática, Abstração.

ABSTRACT

Despite their relevance to various fields of science and technology, complex numbers have been gradually neglected in high school education, often reduced to the mere function of extracting square roots of negative numbers. This article proposes a didactic sequence aimed at contributing to the teaching and learning process of this content, seeking to make it more accessible and meaningful to students. Based on a qualitative approach, supported by a literature review, the discussion highlights how traditional mathematics instruction, often symbolic and decontextualized, hinders the understanding of abstract topics such as complex numbers. It is argued that integrating this content with different mathematical languages, and areas of knowledge, can expand students' possibilities for understanding and application.

KEYWORDS: Complex numbers, High school, Didactic sequence, Mathematics education, Abstraction.

¹ Mestra em em Ciências da Educação pela ACU – Absoulute Christian University.

INTRODUÇÃO

Acredita-se que o pensamento matemático é tão antigo quanto o descobrimento do fogo, sendo que o mesmo resulta de um processo gradual iniciado a mais de trezentos mil anos. No princípio, infere-se que o conjunto de informações imprecisas fornecidas pela percepção de contrastes (diferenças de forma, tamanho, peso, etc.) deu origem a pensamentos analógicos que, por sua vez, serviu de base para o desenvolvimento do pensamento matemático. De modo semelhante, a constatação perceptiva da ocorrência de duas mãos, dois olhos, duas orelhas e outras semelhanças, podem ter propiciado o surgimento da propriedade abstrata que hoje denominamos número. Assim, desde o início do desenvolvimento desse tipo de pensamento, a forma, as grandezas e os números são conceitos básicos para o raciocínio matemático (RAMOS, 2017, p.204-207).

Evidências arqueológicas remetem a origem da matemática ao antigo Egito. Para uma vertente de estudiosos, ela teria surgido supostamente como resposta a necessidades práticas e imediatas do ser humano como a valoração de objetos, o levantamento de rebanhos e a demarcação de territórios. Para outra vertente, a matemática era fruto de rituais religiosos ou uma forma de lazer desenvolvida por sacerdotes. De um modo geral, contudo, infere-se que, originalmente, a preocupação matemática girava em torno da parte visualmente perceptível da vida humana cotidiana (RAMOS, 2017, p.204-207).

Entretanto, ao longo da história, a Matemática foi sendo construída e aperfeiçoada, por meio de um processo de teste, validação e aplicação de teorias, que vem sendo organizadas e sistematizadas, a ponto de se constituir como a Ciência dos números e das grandezas. Entretanto, a sua constante evolução constante permitiu que ela desenvolvesse uma sofisticação intelectual tamanha que lhe permite relacionar coerentemente o seu entendimento de técnicas precisas e exatas a fatos e acontecimentos relacionados não só a práticas humanas

habituais e situações cotidianas, mas também fenômenos e objetos específicos estudados por outras ciências naturais e formais (RAMOS, 2017, p.204-207).

Enquanto uma ciência formal consolidada, a Matemática não só contribuiu para o avanço de outras áreas do conhecimento, mas tornou-se essencial para as mesmas, de forma que, em validações teóricas nas ciências naturais, a comprovação matemática é tão importante quanto a empiria. Atualmente, a matemática é reconhecida pela forma como dá sustentação teórica e propulsiona o avanço em outras Ciências e Tecnologias, chegando a ser considerada uma mola propulsora no desenvolvimento da humanidade (FELICITTI, 2010, p.32; RAMOS, 2017, p.204-207).

A Matemática detém dominância absoluta e universal sobre todas as demais disciplinas, inclusive sobre a língua pátria. Dessa maneira, ela pode ser considerada um dos principais fatores contribuintes para o progresso tecnológico e para o avanço científico. Tanto que comumente acredita-se que quase todo problema cotidiano pode ser equacionado e a maioria das nossas atividades mais rotineiras são controladas por computadores que, por sua vez, operam apoiados na matemática.

Nota-se que há uma tendência de “matematização do mundo” (FELICITTI, 2010, p.32-34; RAMOS, 2017, p.204-207).

Reconhecendo a importância da matemática para o progresso da humanidade, a grande maioria dos países e governos consideram-na uma disciplina universal e obrigatória nos seus sistemas de ensino. Em um mundo que tende a ser matematizado, matemática tornou-se uma habilidade necessária para a sobrevivência da humanidade. De fato, a matemática tem presença ativa tanto no meio escolar quanto fora dele e, portanto, interfere em todas as instâncias de interação da vida do aluno, percebe isso ele ou não. Entretanto, de acordo com a literatura, a matemática não conseguiu enraizar-se profundamente no sistema cultural brasileiro, a ponto de ser considerada um

instrumento de resolução de problemas ou mesmo um fator de motivação dos alunos (FELICITTI, 2010, p.32; RAMOS, 2017, p.204-207).

A literatura indica que é grande a quantidade de alunos que não consegue manipular a matemática devidamente e que não vê utilidade prática para a mesma. Isso pode ser evidenciado pelo fraco desempenho dos alunos em vestibulares, concursos e outras formas de exames probatórios, nos quais a matemática frequentemente é um dos componentes curriculares que os alunos obtêm o pior desempenho. No que se refere ao avanço escolar, a disciplina pode ser considerada o principal fator que contribui para o fracasso do aluno (FELICITTI, 2010, p.32).

Dentre os motivos para essa situação destacam-se a defasagem do currículo escolar, a desmotivação e o desinteresse discente pela disciplina, as condições inadequadas de trabalho e a formação deficitária dos professores que a ministram (FAGUNDO, 2017, p.10).

Em geral, os alunos não estabelecem relação entre a Matemática aprendida em sala de aula e aquela que utiliza cotidianamente, de modo consciente ou inconsciente. A matemática é vista como uma disciplina necessária apenas para que consigam progredir no seu processo de escolarização. Os educandos também tendem a considerá-la uma disciplina difícil e inacessível e muitos desenvolvem uma atitude negativa em relação a ela. Ao longo da escolarização, muitas vezes, essa atitude se converte em aversão, medo e até em resistência direta a aprender qualquer conteúdo que pareça envolver matemática, tornando-se mais evidente no Ensino Médio (FELICITTI, 2010, p.32).

A literatura mostra um consenso em relacionar esse sentimento negativo dos alunos em relação à disciplina de matemática ao fato das aulas de matemática serem trabalhadas de forma demasiadamente teórica, com uma linguagem matemática de conjuntos e com simbolismos em demasia. Os conteúdos são trabalhados em sala de aula de forma expositiva, tendo o aluno como um expectador dos diversos conceitos, fórmulas e regras

descontextualizadas, sem nenhuma relação com a prática cotidiana da realidade sociocultural dos educandos, impossibilitando-lhes de atribuir significado ao conteúdo e sentido à aprendizagem (D'AMBROSIO, 1989, p.15-19; SANTALÓ, 1996, 15-17; SANTOS, 2017, p.1).

Atualmente, a principal forma de o aluno aprender os conteúdos escolares de matemática é por meio da memorização de um conjunto de modelos de resolução apresentados pelo professor, cuja utilização deve ser identificada em meio a prática exaustiva e repetitiva de solucionar diversos exercícios de fixação semelhantes entre si (DIAS, 2017; FAGUNDO, 2017; FELICITTI, 2010; OLIVEIRA, 2017; SANTOS, 2017).

Esse contexto evidenciado na literatura despertou-nos o interesse acerca do ensino aprendizagem do conjunto dos números complexos nas aulas da disciplina de Matemática no Ensino Médio. O interesse se justifica pelo fato de que o estudo dos números complexos em sala de aula é caracterizado por sua abordagem algébrica, pelo uso da linguagem de conjuntos e pelo uso amplo de simbolismos, características que a literatura aponta como desinteressantes e desmotivadoras para o alunado.

Lidar com números, em geral, exige grande capacidade de abstração e utilizar essa capacidade com desenvoltura no estudo de números complexos pode se tornar um desafio ainda mais difícil para os alunos, pelo fato do tema ser de difícil contextualização em relação à realidade sociocultural dos alunos, pois possui pouca ou nenhuma aplicabilidade prática imediata no seu cotidiano.

Além disso, professores e alunos questionam a relevância do estudo dos números complexos no Ensino Médio, sobretudo quando respostas como calcular a raiz quadrada de números negativos e resolver equações polinomiais não possuem muita significância para os alunos. Ademais, um fator que também não contribui para que os alunos percebam a relevância desse tópico da Matemática é o de ele raramente ser contemplado

pelos vestibulares das principais instituições públicas e privadas de curso superior do país (CHAGAS, 2013, p.11).

Como os números complexos supostamente perdem o seu sentido quando isolados das equações, principalmente para aqueles alunos que não vão prosseguir estudando na área da Matemática, esse tema não é considerado um conteúdo indispensável para o currículo da Matemática pelo PCN+ do Ensino Médio. Da mesma maneira, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) também não contempla esse tema (CHAGAS, 2013, p.11).

De fato, na orientação normativa educacional brasileira para o currículo da disciplina Matemática no ensino, os números complexos são um conteúdo opcional do eixo estruturador Álgebra (BRASIL, 2007, p.20-22). Não há um consenso entre os educadores sobre a imprescindibilidade desse conteúdo, portanto, as editoras dos livros didáticos decidem se, quando, quanto e quão profundamente esse assunto será trabalhado em seus textos. Em geral, a abordagem do livro-texto é superficial, trabalhando os números complexos e as suas operações, não sendo feita a articulação entre esse conteúdo e outros campos e linguagens da Matemática, sendo mencionada a sua história ou mesmo citando as suas contribuições para o avanço científico e tecnológico.

O estudo do tema justifica-se, pois, a literatura bibliográfica e a orientação normativa apresentam indícios de que esse é um tema que vem sendo esquecido pelos professores e sendo reduzido a uma ferramenta para se extrair a raiz quadrada de números negativos no processo de ensino-aprendizagem. Contudo, a relevância do estudo do conjunto de números complexos, das suas diversas linguagens e das suas articulações com diferentes campos da Matemática para áreas importantes áreas da ciência e da tecnologia (aerodinâmica, fractais, geração de energia, dentre outros) é incontestável. Assim, a pesquisa tem relevância científica à medida que um processo de ensino-aprendizagem adequado dos números complexos na Educação Básica, pode incentivar e despertar o interesse

dos alunos para seguirem profissões que utilizem modelos matemáticos avançados e que, portanto, contribuem para o avanço tecnológico e científico da humanidade.

Os estudos de Correa e Maclean (1999 *apud* FELICITTI, 2010, p.34) mostram que a matemática não considerada a disciplina mais difícil entre os alunos. O que interfere no entendimento do seu conteúdo são os aspectos diretamente relacionados à experiência didático-pedagógica e, principalmente, nas diferentes maneiras de trabalhar a sequência de conteúdos. Sendo que, os conteúdos trabalhados de maneira errônea contribuem para o desenvolvimento de um sentimento negativo e um comportamento aversivo à Matemática, por parte dos alunos. Essa aversão/medo acompanha o aluno por toda a sua trajetória escolar posterior. Levando isso em consideração, gostaríamos de saber como o professor de matemática pode trabalhar os números complexos tornando-os mais interessantes e úteis aos alunos?

Com base nos textos bibliográficos revisados inicialmente, a hipótese a ser comprovada é a de que é possível despertar o interesse do aluno mostrando que os números complexos não se limitam a propiciar a obtenção da raiz quadrada de números negativos, mostrando a forma como esses números se articulam com outros campos e linguagens da Matemática, permitindo que o aluno utilize mais de uma opção de resolução de exercícios (algébrica, geométrica e trigonométrica). Como hipótese auxiliar pressupomos que apresentar a história do desenvolvimento do conteúdo e mencionar como ele contribui para outras áreas da ciência e tecnologia, pode permitir que os alunos vejam uma utilidade para ele, não imediata, mas futura, despertando assim o seu interesse. Por fim, outra hipótese auxiliar é a de que o uso de atividades que envolvam as TIC, principalmente aquelas que possuem caráter lúdico, além de estimular os alunos, pode ajudá-los na capacidade de abstração dos alunos e tornar o tema menos difícil.

Assim, este trabalho tem como objetivo geral contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos números complexos. Pretendemos atingi-lo por meio dos seguintes objetivos específicos: apresentar em particular a ligação existente entre a geometria e os conceitos dos números complexos; elaborar uma sequência didática visando a necessidade do educando em extrair a raiz quadrada de um número natural; apresentar sugestões didático-pedagógicas para tornar o conteúdo dos números complexos mais interessante e estimulante para os alunos, segundo os textos revisados; comparar o modelo de ensino-aprendizagem matemática ideal e real apresentados pela literatura com a realidade em sala de aula por meio de uma pesquisa de campo.

Para atingir os objetivos propostos realizamos uma pesquisa exploratória ² do tema números complexos, que aborda o problema de forma qualitativa² e cuja a classificação em relação aos meios pode ser considerada tanto pesquisa bibliográfica quanto pesquisa-ação³.

Nosso trabalho utilizou inicialmente como técnica de coleta de dados a revisão bibliográfica utilizando diversos estudos e análises de alguns livros e artigos, cujos textos estão relacionados aos números complexos, à Matemática como um todo e às concepções didático-pedagógicas do seu ensino-aprendizagem, para melhor elucidação. Também foram considerados textos referentes à orientação normativa como o PCN, o PCN+ do Ensino Médio e o Guia de Livros Didáticos – PNLD 2012 – Matemática. Assim foi possível construir um modelo

com propostas didático-pedagógicas para se trabalhar os números complexos.

Na ânsia de fomentar a pesquisa, buscou-se trabalhar com o método observatório e exploratório do assunto como um todo, foi realizada uma pesquisa de campo na E.E.E.F.M. Professora Juraci Machado. Inicialmente aplicamos um questionário com os alunos do 3º ano do Ensino Médio, que foi fundamental para dar rumo à proposta de sequência didática. Observamos de forma não participante a construção do plano de ensino trimestral do professor da disciplina de matemática da, afim de agregar veracidade a teoria e prática do assunto em questão. Posteriormente analisamos o plano de ensino do 1º trimestre do ano letivo de 2018, livros didáticos abordados pela mesma. Também realizamos a observação não participante de 15 aulas ministradas pela professora regente de matemática durante o ensino-aprendizagem dos números complexos naquela turma. Por fim, realizamos observação participante por meio de um minicurso de geogebra realizado com alunos do ensino médio e, quando implementamos a nossa proposta de sequência didática em sala de aula, supervisionados pela docente regente de matemática.

No primeiro capítulo abordaremos toda a história dos números complexos, conceitos, subdivisões e a importância dos mesmos. Além disso, outro fator se remete a importância da geometria, juntamente com os números complexos e suas subdivisões.

No segundo capítulo exporemos a situação real do ensino-aprendizagem e das práticas docentes durante

¹ O tipo de pesquisa foi exploratório onde a aplicabilidade das aulas foi o ponto chave para a construção deste trabalho ao qual ainda foi embasado na bibliografia pertinente sobre o assunto abordado quanto ao processo de ensino aprendizagem que permeia a leitura. O que significa dizer, que consiste em analisar tanto as fontes, quanto os materiais disponíveis sobre o assunto. Assim, o material utilizado para o desenvolvimento teórico fora pertinente na literatura, tal como autores que permeiam sobre o assunto (VERGARA, 2003).

² Do ponto de vista de Vergara (2003) da forma de abordagem do problema a pesquisa poder ser qualitativa e quantitativa. É quantitativa quanto utiliza estatísticas para levantamento de parte dos dados. A pesquisa de campo é apresentada com qualificações percentuais. Uma pesquisa é qualitativa quando

há descrições detalhadas de situações e eventos, pessoas interações, comportamentos observados, situações laterais do que as pessoas falam de sua experiência.

³ Quanto aos meios de investigação a pesquisa pode ser: pesquisa de campo, pesquisa de laboratório, documental, bibliográfica, experimental, pesquisa ação e estudo de caso. No caso da presente pesquisa, ela pode ser considerada tanto pesquisa ação quanto pesquisa bibliográfica, pois foi necessária uma ampla revisão da literatura para fundamentar a elaboração de uma modelo de intervenção no ensino-aprendizagem dos números complexos, tanto de práticas didático-pedagógicas quanto de sequência didática (VERGARA, 2003, p.47)

as aulas da disciplina de Matemática, tal como foram apresentados nos textos bibliográficos revisados. Também serão apresentados os modelos ideais contendo as sugestões que a mesma literatura apresenta para resolver os problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de Matemática. Além disso, será realizada uma introdução de uma sequência didática afim de sanar o déficit e auxiliar no ensino-aprendizagem.

No terceiro capítulo apresentamos uma proposta curricular e enfatizamos a geogebra como instrumento de aprendizagem, também expomos relatos sobre o uso da mesma em sala de aula. Neste capítulo também é exposta parte da sequência didática elaborada com o propósito de intervir no processo de ensino-aprendizagem dos alunos do 3º ano do Ensino Médio da E.E.E.F.M. Professora Juraci Machado.

Por fim, o ultimo capitulo apresentamos os dados coletados por meio de observação e também a discussão os resultados da pesquisa de campo realizada na E.E.E.F.M. Professora Juraci Machado. Também concluímos a dissertação sobre a sequência didática elaborada 3º ano do Ensino Médio dessa escola.

A contribuição dessa pesquisa não foi conscientizar o leitor dos problemas e dificuldades enfrentados por professores e alunos do sistema de ensino brasileiro no processo de ensino-aprendizagem da Disciplina de Matemática, mas também apresentar as soluções indicadas para os mesmos pela literatura. No que tange o tema números complexos, a pesquisa contribui por apresentar uma proposta didático-pedagógica e uma sequência didática baseadas em textos acadêmicos e estudos científicos.

A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Buscou-se desde a antiguidade o conceito e história dos números completos, principais destaques

que contribuíram para o desenvolvimento e inserção de conteúdos acerca de raízes que eram consideradas sem solução. Inquietações surgiram acerca dos números complexos, onde levou-se a abranger esse conteúdo de uma forma mais expositiva e atraente para o processo de ensino-aprendizagem dos educandos. No entanto uma ênfase e dada ao educador visto que o mesmo necessita de abordagens funcionais.

Segundo Robson Coelho, os textos de história da matemática afirmam que o surgimento dos números complexos está diretamente ligado as tentativas de resolução de equações algébricas do 3º grau. É no livro “Ars Magma”³, Girolamo Cardano (1501-1576), publicado em 1545, que podemos encontrar o primeiro registro desse surgimento. Tudo ocorre quando Cardano expõe os métodos de Scipione Del Ferro (1465-1526) e Nicolo Tartaglia (1500-1557) para resolver tais equações. Para que esses métodos fornecessem algumas raízes conhecidas a priori, Cardano precisou operar com raízes quadradas de números negativos segundo as regras usuais da álgebra de então. Naturalmente que Cardano se mostrou surpreso e incrédulo diante dos fatos, afinal, nessa época nem os números negativos eram compreendidos com muita clareza. Assim sendo, ele não ousou seguir adiante.

De acordo com (AMORIM, 2006), pode-se afirmar que os números complexos surgiram primeiramente para demonstrar medidas de grandeza, no caso, os números positivos. Levou-se uma grande caminhada na História da humanidade para chegar à concepção de conjuntos Reais (conjunto dos números Naturais, conjunto dos números Inteiros, conjunto dos números Racionais e conjunto dos números Irracionais).

O primeiro problema a requerer o uso dos números complexos foi a resolução das equações quadráticas. As equações de segundo grau apareceram na matemática

³ Ars Magna, de Girolamo Cardano é o primeiro livro de Álgebra da Renascença a ir além dos resultados obtidos pelos matemáticos da antiguidade e pelos matemáticos árabes.

aproximadamente 1700 anos antes de Cristo e, ocasionalmente, levaram a radicais de números negativos, porém não foram elas que fizeram com que os números complexos fossem abordados. Na época, uma equação era desenvolvida para solucionar um problema concreto, assim, “se no processo de resolução aparecia uma raiz quadrada de um número negativo, simplesmente isso indicava que o problema inicial não tinha solução”. (MONZON, 2010, p. 5)

Segundo Eves (2004), o livro *Esteriometria*, do grego Herón, publicado no primeiro século depois de Cristo, traz o primeiro registro de um número radical negativo. Após algum tempo, aproximadamente em 275 d.C., no livro *Arithmetica*, de Diophanto, aparece a descrição do seguinte problema: um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados. Mas não existem registros da solução do problema.

O matemático italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576), em 1545, que propôs o seguinte problema: “Dividir 10 em duas partes de modo que o seu produto seja 40”. Na tentativa de resolver o problema, Cardano utilizou a igualdade $a+bi$ e $a-bi = a^2+b^2$ que o levou a considerar as expressões $5 \pm \sqrt{15}$ e $5 \pm \sqrt{15}i$, que são denominadas por números conjugados na forma $a \pm bi$ como soluções do problema (GARBI, 2006). Porém, ele mesmo concluiu que esse problema era impossível e que essas expressões não tinham nenhum significado.

Nessa época, outro grande matemático Niccolo Fontana (1500 – 1557), o Tartaglia, foi desafiado para um duelo matemático. Tal duelo consistia na apresentação recíproca de questões para serem resolvidas pelos participantes. Mas, antes do encontro, Tartaglia sentiu-se ameaçado, quando soube que seu oponente pretendia apresentar problemas envolvendo equações do 3º grau. Após vencer o desafio que o tornou mais famoso, Tartaglia resolveu escrever em suas memórias: “Mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas

equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1531” (GARBI, 2006).

Segundo Eves (2004), o primeiro matemático que resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 \pm mx \pm n$, provavelmente baseando-se em fontes árabes, foi Scipione del Ferro, (1465 – 1526), em Bolonha, por volta de 1515. Del Ferro revelou seu segredo ao seu pupilo, Antonio Fior, e não publicou o resultado. Porém, em meados do século XVI, Niccolo Tartaglia, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 \pm px^2 \pm n$.

Achando que se tratava de blefe, Fior desafiou Tartaglia para uma disputa pública envolvendo a resolução de equações cúbicas. Com muito empenho Tartaglia conseguiu resolver também, faltando poucos dias para a disputa, a equação cúbica desprovida do termo quadrático. Como no dia marcado sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente. Mais tarde, Girolamo Cardano, um gênio inescrupuloso que ensinava matemática e praticava medicina em Milão, depois de um juramento solene de segredo, conseguiu arrancar de Tartaglia a chave da solução cúbica. Em 1545, porém quando apareceu em Nuremberg a *Ars Magna* de Cardano, um grande tratado em latim de álgebra, lá estava a solução de Tartaglia da cúbica. (EVES, 2004, p.47)

Na obra *Ars Magna*, de Cardano, aparece pela primeira vez a fórmula descoberta por Tartaglia na resolução de equações cúbicas, este fato foi considerado o marco inicial da história da matemática do período moderno. Porém, a fórmula utilizada por Cardano só se aplicava em algumas operações, pois na época não se extraíam raízes quadradas de números negativos. Fato este que marca a primeira dificuldade de Cardano ao aplicar a fórmula para a resolução da equação, que representava a seguinte situação problema: “Qual a medida x , comum à aresta de um cubo e à altura de um

paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?”

A publicação da fórmula que permite determinar o conjunto-solução de equações cúbicas ocorreu em 1545, na obra *Ars Magna*, do matemático Girolamo Cardano, na qual o autor faz referência a um novo tipo de número, que denominou “quantidade fictícia”. Tais quantidades eram na realidade raízes quadradas de números negativos, hoje tratados como números imaginários. (SOUZA, 2010, p 228)

Em 1572, Raphael Bombelli (1526–1573), apreciador da obra *Ars Magna*, publicou uma obra denominada *Álgebra*, onde deu continuidade a resolução da equação de Cardano, na qual aplicou a fórmula de Tartaglia (equação 1) obtendo outro resultado. Como na época não era aceita a raiz de números negativos, Bombelli utilizou outros métodos de resolução da equação como ferramenta de cálculo no qual se propunha determinar os números a e b positivos. Após alguns desenvolvimentos algébricos, concluía que a para obter este resultado o símbolo 1 que hoje é denominada a parte imaginária, como se pode perceber ao longo da história predominou como resolução.

Ainda neste mesmo período os matemáticos Albert Girard (1590 – 1633), em 1629 passaram a escrever as raízes quadradas de números negativos na forma $a + b\sqrt{-1}$ e René Descartes (1596 – 1650) em 1637, designou, a de parte real e b de imaginário. (EVES, 2004). Ainda conforme descreve Eves (2004) em 1748, Leonhard Euler (1707 – 1783) usa a letra i para representar novas equações. Em 1797, Gaspar Wessel (1745 – 1818), representou geometricamente $a + bi$, publicando em 1798, na Dinamarca a apresentação dos números complexos no plano cartesiano. No ano de 1832, Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) denominou a representação realizada por Wessel de Números Complexos, representando pela forma geométrica em

um plano, pelo par ordenado (a,b) . Ainda século XVIII, Abraham de Moivre (1667 – 1754) introduziu métodos mais modernos como operações entre números complexos e, finalmente William Rowan Hamilton (1805 – 1865), 1833 apresenta a multiplicação de números complexos, como é realizada até os dias de hoje (BOYER, 1974).

A importância dos números complexos está na área científica, pois além da ampliação do conjunto numérico, que possibilita a resolução de equações polinomiais e em geometria, possui enorme aplicação prática em Engenharia Elétrica, na análise de fatores e corrente elétrica, além de uso na Topografia, na Cosmologia, na Astrofísica e na Informática (ARAÚJO, 2006).

Outro fator relevante segundo Souza (2006), a maioria dos alunos acha que não gosta de Matemática porque, os professores não sabem ensinar a matéria. A matemática deve ser ensinada pelo professor, utilizando-se formas para despertar a criatividade, pois a mesma não é uma disciplina feita apenas para calcular, mas para pensar. A utilização do raciocínio lógico e de suma importância para a construção de um indivíduo.

CONCEITOS BÁSICOS E APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A partir do século XIX a teoria dos números complexos tem ampla utilização, com o surgimento da representação geométrica, motivada pela necessidade de se trabalhar com vetor plano em Geometria, Topografia e Física. Assim, os números complexos passam a ser aplicados em várias áreas do conhecimento humano, dentro e fora da Matemática, como em áreas da Engenharia e Ciências.

Na Matemática, destaca-se o uso de números complexos para aplicação de Fractais, sendo identificados por Benoit Mandelbrot entidades geométricas especiais e características, denominadas fractais. Segundo (DANTE, 2010), um fractal é uma forma cujas partes se

assemelham ao seu todo sob alguns aspectos, no qual permite desenhar (ou modelar) qualquer coisa (ou fenômeno) da natureza numa tela de computador (computação gráfica).

Segundo Secco (2004) estas formas geométricas de dimensão fracionária servem como ferramenta para descrever formas irregulares da superfície da terra; modelar fenômenos, aparentemente imprevisíveis (teoria do caos), de natureza meteorológica, astronômica, econômica, biológica e outros fatores. Von Koch (1904) e Julia (1910), foram os pioneiros no nascimento dessa nova matemática.

Pode-se ainda destacar a utilização de números complexos na Engenharia Elétrica, sendo aplicado na análise de circuitos de corrente alternada (CA). De acordo com Alexander C. e Sadiku M., 2008, essa teoria foi iniciativa do cientista alemão.

Hermann Von Helmholtz (1821-1824), sendo que a utilização foi realizada por Julis Berg (1871-1941), e a adoção do termo impedância por Arthur Edwin (1861-1939). Assim, Charles Proteus Steinmetz (1865-1923) formulou teorias matemáticas para engenheiros com a fomentação do desenvolvimento da corrente alternada, que possibilitou a expansão da indústria de energia elétrica, no final do século XIX nos Estados Unidos. Observa-se que atualmente esse conceito dos números complexos em análise de circuitos de corrente alternada são utilizados em instalações elétricas residenciais (ALEXANDER, 2008).

No ramo de aerodinâmica os números complexos foram utilizados por Joukowski (1906), que através de transformações geométricas construiu uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião usando o princípio de Bernoulli (1738) e a teoria das funções complexa. Isso permite

calcular a força de levantamento responsável pela sustentação do voo de um avião (SMOLE, 2010).

Na geometria, os números complexos são aplicados na utilização dos conceitos de rotação de pontos em um eixo de sistema cartesiano por Maurits Cornelis Escher (1898-1972), considerado um dos artistas gráficos mais conhecido no mundo, um dos exemplos está na sua obra Limite Circular III (RIBEIRO, 2010).

Sendo assim, observa-se que os números complexos estão presentes em nosso cotidiano servindo como ferramenta de apoio para diversas áreas, sendo cada vez mais aperfeiçoados no que diz respeito ao seu conhecimento e novas aplicações, como as transformações complexas que envolvem inversão (LIMA, 2006).

Abaixo apresentaremos dois problemas introdutórios que não mencionam o assunto que será abordado, mas a resolução que o mesmo requer. A ideia central é propor aos educandos problemas que resultem em equações algébricas do 3º grau. No entanto para obter maior aprendizado acerca do tema, caso o professor ache necessário, ele pode começar a sequência demonstrando a famosa fórmula de Bhaskára⁴ usada para as resoluções de equações do 2º grau.

Problema introdutório: Em um termo geral, as equações algébricas, vêm se destacando desde a antiguidade, onde as mesmas possuíam motivações geométricas. Contudo os povos da Babilônia deixaram em seus tabletes de escritas cuneiformes vários exemplos de que eles dominavam o uso de equações. Num tablete babilônico que se encontra no museu britânico, em Londres, aparece o seguinte problema:

“Da área de um quadrado, eu subtraí um terço de seu lado e o resultado é 1/12. Quanto mede o lado do quadrado?”

⁴ A fórmula de Bhaskara é um método resolutivo para equações do segundo grau cujo nome homenageia o grande matemático indiano que a demonstrou. *Essa fórmula nada mais é do que um método para encontrar as raízes reais de uma equação do*

segundo grau fazendo uso apenas de seus coeficientes. Vale lembrar que coeficiente é o número que multiplica uma incógnita em uma equação.

Naturalmente a área e o lado de um quadrado não podem ser somados por serem entes diferentes, o que este problema quer dizer é que foram somados os respectivos valores

numéricos. Em notação atual, o problema seria representado por "encontre um número real x tal que $x^2 - 13x = 112$ ", em que x é a medida de um lado do quadrado. Imaginemos, agora, o seguinte enunciado: Em notação atual, o problema seria representado por "encontre um número real x tal que $x^3 - 15x = 4 \Leftrightarrow x^3 - 15x - 4 = 0$ ".

Comentários: Obviamente os educandos não saberão resolver a equação proposta já que só conhecem, até o momento a fórmula para resolução de equação do 2º grau. Esta é uma hora oportuna para o educador exemplificar com os educandos que os matemáticos da antiguidade tiveram estas mesmas dificuldades. Logo após, o mesmo deve ir mostrando como foi possível resolver situações como estas, passando para resolução dos problemas a seguir que levam à fórmula de Cardano/Tartaglia para resolução deste tipo de equação.

1º Problema: Considere a equação geral do 3º grau, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, na variável x , com a, b, c e d reais, $a \neq 0$. Mostre que ela pode ser transformada em uma equação do tipo $y^3 + py + q = 0$. (Sugestão: faça a mudança de variável $x = y - b/3a$).

Solução: Substituindo por $x = y - b/3a$ na equação de 3º grau dada, obtemos:

$$a\left(\frac{y-b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{y-b}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{y-b}{3a}\right) + d = 0.$$

Desenvolvendo os conteúdos dos parênteses, obteremos:

$$a\left(\frac{y^3 - 3y^2b + 3yb^2 - b^3}{27a^3}\right) + b\left(\frac{y^2 - 2yb + b^2}{9a^2}\right) + c\left(\frac{y-b}{3a}\right) + d = 0$$

Multiplicando os dois membros da equação acima por $27a^3$, obteremos:

$$y^3 - 3y^2b + 3yb^2 - b^3 + 3y^2b - 6yb^2 + 3b^3 + 9acy - 9acb + 27a^2d = 0, \text{ donde segue que } y^3 + (9ac - 3b^2)y + (2b^3 - 9acb + 27a^2d) = 0.$$

Fazendo $p = 9ac - 3b^2$ e $q = 2b^3 - 9acb + 27a^2d$, teremos $y^3 + py + q = 0$

O principal objetivo deste problema é convencer e exemplificar aos educandos de que, em uma equação de 3º grau, sempre pode-se eliminar o termo x^2 . Sendo assim, saberemos resolver qualquer equação geral do terceiro grau se soubermos resolver equações do tipo $y^3 + py + q = 0$. A ideia de Tartaglia foi supor que a solução procurada é do tipo $y = A + B$.

A GEOMETRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS COMO POSSIBILIDADE DE ENSINO-APRENDIZAGEM

A história do conhecimento matemático, em especial dos números complexos, foi sendo construída num processo de evolução muito longo, e no caso desses números por diversos matemáticos. Os números complexos, assim como os demais números, ocupam um espaço no conhecimento matemático construído pela humanidade, não menos importante que os demais na solução de situações problemas, envolvendo cálculos. Mas, o seu reconhecimento na matemática só ganhou impulso e legitimação com a sua interpretação geométrica, no século XIX.

No ensino da matemática, em instituições educacionais, em nível de ensino médio ou mesmo de ensino superior, os números complexos nunca tiveram o destaque merecedor pelos professores de matemática, pois na maioria das vezes são tratados como "elementares".

Estudos como os de Araújo (2006), Carneiro (2004) e Inácio; Machado e Souza (2006), nesta área mostram que este pouco destaque se dá pela forma como é apresentado

aos alunos, ou seja, acabam chegando aos alunos somente como um número imaginário e que servem apenas para extrair a raiz quadrada de um número negativo, dando a ideia de que este conjunto de números serve apenas para resolver equações algébricas de terceiro e quarto grau, ou mesmo para resolver equações de segundo grau com discriminante negativo. Com este enfoque acabam perdendo a oportunidade de mostrarem os números complexos como entes geométricos que possibilitariam uma discussão mais abrangente e motivadora para os alunos.

A inclusão dos números complexos nos parâmetros curriculares para o ensino médio e suas relações com o conteúdo de outras disciplinas como a Física, a Engenharia, os Circuitos Elétricos, a Topografia, a Informática e a Cosmologia apontam para a importância destes conteúdos na formação matemática do aluno (ARAÚJO, 2006, p. 17-18).

Essa inclusão no ensino da matemática e o uso da geometria no estudo dos números complexos se fazem importantes, considerando a história que deixa claro a existência da aplicação desse conjunto numérico quando representado geometricamente. Portanto, fica claro que desde o primeiro contato com o assunto, o aluno precisa ter a oportunidade de entender o número complexo como ente geométrico, e não apenas como uma solução para raízes negativas das equações de segundo grau.

Com a discussão da geometria, por meio da relação com os números complexos, abrem-se fronteiras do real (R) para o complexo (C), propiciando o entendimento de novos fenômenos como, por exemplo, a própria existência dos números complexos.

Ao abordar o assunto de números complexos, tem-se a oportunidade de expansão do conhecimento e o aprimoramento das práticas pedagógicas. Muitas vezes, o educador não sabe o que se deve ensinar ou aprofundar sobre conteúdo ao aluno de ensino médio.

Limita-se ao conhecimento da extração de números negativos em uma raiz quadrada e em citações de aplicações no ramo da física, no caso de corrente alternada, de forma superficial, tendo em vista que o mesmo é utilizado de forma indireta.

O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS SUBDIVISÕES

Existem várias formas de apresentação do conjunto dos números complexos. Uma definição para este conjunto numérico frequentemente apresentada em livros didáticos de Matemática é:

$$C = \{a + bi/a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

Segundo Mathias (2008, p. 84) o mesmo, considera esta definição inadequada para o Ensino Médio e expõe algumas de suas fragilidades como:

- Uma definição que busca situar o que é um número complexo não pode utilizar um número complexo (i) sem antes tornar preciso o seu significado, individualmente.
- Ao escrever $a + bi$ e $i^2 = -1$, se omite o fato de que as operações de soma e produto presentes não são as mesmas utilizadas em R (conjunto numérico sobre o qual se desenvolve a maior parte da matemática estudada no Ensino Médio).

Segundo Mathias (2008, p.78):

O conceito de número complexo, como veremos, é um conceito cuja compreensão fundamental se dá sobre argumentos geométricos e algébricos. Qualquer tratamento puramente algébrico, ainda que bem apresentado, será pouco revelador no que diz respeito ao imenso potencial deste conceito, que vai muito além da grande conquista chamada Teorema Fundamental da Álgebra.

Nessa pesquisa optou-se por englobar os aspectos geométricos, onde considera-se a representação geométrica muito importante no estudo

deste tema no Ensino Médio, pois permite estabelecer conexões com outros tópicos da matemática estudados nesse nível de escolaridade.

Na adição e subtração de dois números complexos na forma trigonométrica, polar ou exponencial, é necessário transformar estes números complexos na forma algébrica.

Na multiplicação entre dois números complexos na forma trigonométrica, polar ou exponencial, multiplicam-se os módulos e adicionam-se os ângulos, e na divisão, dividem-se os módulos e subtraem-se os ângulos:

Seja $C = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos números complexos munido das operações:

Adição:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Multiplicação:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

FORMA ALGÉBRICA DO NÚMERO COMPLEXO

Nos livros didáticos atuais, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, que contém o conjunto dos números Reais, pode ser definido como o conjunto de pares ordenados (a, b) , onde estão inseridas as operações de adição e multiplicação com as devidas propriedades: comutativa, associativa e distributiva. Pode ser escrito na forma algébrica $z = a + bi$, sendo a e b números reais e i a unidade imaginária, onde são denominados por: parte real $\text{Re}(z) = a$ e por parte imaginária $\text{Im}(z) = b$ que satisfaz a condição $i^2 = -1$ (BIANCHINI, 2003).

O ponto (a, b) pode ser representado no plano cartesiano, dito representação geométrica de um número complexo. Esta sua representação corresponde a um único ponto, chamado de afixo e o número complexo $z = a + bi$ é associado a um único vetor, com extremidades na origem do plano e no ponto $P(a, b)$. O ponto P é denominado imagem de z (BARROSO, 2010).

A cada número complexo z corresponde um único ponto do plano, o afixo de z , e a cada ponto do plano corresponde um único número complexo ou plano de Gauss (Carl Friedrich Gauss/1777-1855) ou de Argand-Gauss (Jean Robert Argand/1768-1822) (IEZZI, 1981, p. 130)

Nessa relação, no eixo das abscissas são representados os números reais e no eixo das ordenadas os imaginários. No plano Argand-Gauss, o número complexo e seu conjugado são simétricos entre si em relação ao eixo real.

Seja o número complexo $Z = (a, b)$. Podemos escrever:

$$Z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \Leftrightarrow Z = a + bi$$

Dita forma algébrica do complexo Z . O número real a é chamado de parte real de Z ($a = \text{Re}(Z)$) e b , a parte imaginária de Z ($b = \text{Im}(Z)$).

Se $b = 0$, Z é um número real. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, Z é dito imaginário puro.

Assim:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ribeiro (2007, p. 118) costumava citar:

A forma algébrica é muito útil operacionalmente pois, tanto para a soma quanto para o produto de complexos, ela sugere que operamos como se estivéssemos operando em $\mathbb{R}$ os polinômios do primeiro grau na variável x , onde i faz o 'papel' do x , tal que $x^2 = -1$

Dado o número complexo $Z = (a, b)$, cujo módulo é $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, θ é o ângulo que Z forma com o eixo real. θ é chamado de argumento de Z . Então,

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\theta \text{ e } \sin\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\sin\theta.$$

$$Z = (a, b) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos\theta, \sin\theta) \Leftrightarrow Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (1.6)$$

REFLEXÕES SOBRE AS PRÁTICAS DOCENTES E O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Atualmente, entende-se que o papel do professor no processo ensino-aprendizagem é mediar e controlar o ritmo da aprendizagem, sem tornar-se o centro de todas as ações. Dessa forma, o docente não ensina, apenas orienta a aprendizagem, incentivando os alunos a estudarem, pois sem esforço não há aprendizado. Para tanto, diante aumento do número e da diversidade de alunos em sala de aula, o educador também deve se empenhar buscando novas abordagens que contemplem o maior número de alunos possíveis. Nesse sentido, também é necessário que ele tenha um bom domínio da linguagem e que desenvolva constantemente a capacidade de se relacionar.

Assim, entendemos, portanto, que:

Na Atualidade, A Formação Do Aluno Prioriza O Saber Pensar E Este Deve Ser O Lame Da Construção Das Diversas Atividades Que Permitam Ao Aluno Se Identificar Com As Situações Criadas; Participar Com As Características E Habilidades Que Lhe São Próprias; Perceber As Diversas Aplicações No Dia A Dia; Atender Ao Desenvolvimento De Suas Competências; E Despertar Para Novas Habilidades.

⁵ Eixo real, isso para o ensino médio, é representado por uma reta na qual os números reais são representados ordenadamente, seria como uma régua de escola que contesse todos os números tais como naturais 0,1,2,3,4..., inteiros -3,-2,-

Da mesma maneira, defendemos na presente pesquisa que o indivíduo necessita socializar dentro e fora da escola e que como professores, temos que tentar desenvolver o aluno como cidadão.

Pensamos que, quando se trava uma batalha, devemos definir estratégias, isto é, onde, quando e com quem se trava essa batalha e explorar condições favoráveis com o fim de alcançar objetivos específicos. Também devemos planejar as táticas de ação, ou seja, tratar da disposição e das manobras das forças durante o combate; processo empregado para alcançar os objetivos específicos. Em outras palavras, a estratégia leva ao planejamento de uma ação: criar uma armadilha; e a tática, ao emprego de dispositivos que viabilizem alcançar a ação planejada: utilizar um chamariz ou atrativo que conduza à armadilha. Um exemplo concreto dessa ideia está presente na máxima de ONG ambientalistas que diz: "Pensar globalmente e agir localmente". A estratégia é pensar no todo, no homem como parte do ambiente e quais as consequências dos seus atos em dimensões maiores; mas a tática é agir localmente, como se responsabilizar pelo lixo que se produz, para que se possa compreender a dimensão dos seus atos, maximizando ou minimizando o problema. (NASCIMENTO, 2015 *apud* CHAVES, 2004, p.92) (*Ipsis literis*).

Sendo assim, o processo de ensino aprendizagem pode se tornar uma prática social, pois deve acontecer em todos os momentos e lugares. Na elaboração do material, optamos por uma metodologia onde o professor não será o único detentor do conhecimento. A proposta desse trabalho é colocar o aluno no centro do processo na descoberta e construção da aprendizagem através de questionamentos e análise das informações.

1 racionais 1/20, 2/35, 10/9 e irracionais como raiz de 2 ou qualquer raiz não exata.

Além das novas perspectivas, o aluno deve ser levado a refletir e explorar essas novas formas de conhecimento e as ações que deve tomar:

A Educação Matemática não deve apenas ajudar os estudantes a aprenderem certas formas de conhecimento e de técnicas, mas também convidá-los a refletir sobre como essas formas de conhecimentos e de técnicas devem ser trazidas à ação (SKOVSMOSE, 2004, p.53)

Assim, o professor deve assumir o papel de mediador da aprendizagem e não se tornar responsável por ela, tarefa que fica a cargo do aluno. O docente deve orientar o ritmo da aprendizagem, enfatizando os conteúdos essenciais e às vezes desdenhando alguns conteúdos acessórios, para dar conta de toda a lista do programa. Ele deve demonstrar entusiasmo e conhecer o conteúdo o bastante para ser capaz de apresentá-lo de diferentes maneiras. Além disso, ele deve estar disposto a melhorar e se aprimorar continuamente (DIAS, 2017, p.76).

Nesse momento, vemos a necessidade de deixar clara a nossa concordância com a afirmação de Dias (2017, p.77) de que:

Por outro lado, além da atuação do professor e na maneira como devem ser empregados os conceitos matemáticos, o processo ensino/aprendizagem depende de políticas públicas na elaboração de currículos, valorização de professores etc. As dificuldades com o ensino nas escolas persistem com o passar dos anos e programas de tentativas de melhorias vão sendo adotados e deixados de lado sem que, efetivamente, apareçam resultados satisfatórios.

Dessa maneira, em relação ao ensino-aprendizagem de matemática, vemos a necessidade de esclarecer que, historicamente, no início da década de 1960, difundiu-se no Brasil o movimento educacional

intitulado “Matemática Moderna” para a melhoria do ensino da disciplina, promovendo mudanças radicais que, inicialmente, entusiasmaram os professores de matemática. Esse movimento priorizava a Matemática Abstrata em detrimento da Matemática Prática, ou seja, enfatizava os conceitos e não as suas manipulações (DIAS, 2017, p.72).

Diante da constatação da inadequação de alguns dos seus princípios e de algumas distorções ocorridas durante a sua implementação, essas reformas foram sendo gradativamente abandonadas (BRASIL, 1997, p.20). No entanto, diferentemente de outros países onde esse refluxo foi mais rápido, no Brasil a reversão das reformas promovidas pelo movimento “Matemática Moderna” persistiram durante toda a década de 1970 (DIAS, 2017, p.72).

Nos anos de 1980, houve fortalecimento do processo de inserção da matemática nas concepções construtivistas, tentando uma abordagem matemática mais próxima da realidade do educando, na qual ele pudesse participar das atividades e atribuir significado e aplicabilidade prática e cotidiana para os conteúdos matemáticos apresentados em sala de aula (SANTOS, 2017, p. 1, FAGUNDO, 2017, p.13-15).

No entanto, atualmente, o ensino da matemática ainda é fortemente influenciado pela tendência tecnicista instaurada nos anos de 1970, na qual os recursos e técnicas de ensino passaram a ser o foco do processo de ensino-aprendizagem. Assim, por meio da repetição mecânica um determinado conjunto de técnicas de resolução ensinadas pelo professor, era proporcionada ao aluno a capacidade de resolver um determinado conjunto de exercícios e situações-problemas padrão (FAGUNDO, 2017, p.13-15, GOMES, RODRIGUES, 2014, p.11; SANTOS, 2017, p.1).

De um modo geral, as aulas de matemática são tipicamente expositivas das quais os alunos são meros espectadores e não sujeitos partícipes no processo ensinoaprendizagem. O professor, preocupado com o cumprimento do programa, escreve na lousa o conteúdo

que julga ser importante. Esse conteúdo descontextualizado, imutável e inflexível é copiado pelo aluno em seu caderno, como se fosse um produto de mentes privilegiadas (D'AMBROSIO, 1989, p.15-19; SANTOS, 2017, p.01).

Posteriormente, na resolução de exercícios didáticos de aplicação, os algoritmos de resolução apresentados pelo professor são repetidos, ou seja, a resolução de exercícios matemáticos em sala de aula reduz-se à repetição de modelos de solução determinados pelo professor (D'AMBROSIO, 1989, p.15-19; SANTALÓ, 1996, 15-17; SANTOS, 2017, p.1).

Por isso, nesse modelo tradicional, o aprendizado da matemática ocorre por meio da memorização e/ou mecanização de informações reforçadas pela prática constante e exaustiva de exercícios repetitivos. Assim, não é oportunizada ao aluno a possibilidade de construir o seu conhecimento por meio das aptidões adquiridas no processo de ensino-aprendizagem da matemática em sala de aula (CERCONI, MARTINS, 2014, p.1-3).

A LINGUAGEM MATEMÁTICA, O SIMBOLISMO, O ALGEBRISMO E A ROTINA NAS AULAS DE MATEMÁTICA

A linguagem é o principal meio através do qual o processo ensino-aprendizagem ocorre, ela está continuamente presente em sala de aula, inclusive nas aulas de Matemática:

O processo de ensino e aprendizagem em Matemática está diretamente ligado à forma de comunicação estabelecida em sala de aula, onde a mesma se desenvolve através da linguagem, sendo está um aspecto central em todas as atividades humanas e, em particular, nas aulas. Logo, a ligação entre a linguagem e a comunicação é evidente, visto que a segunda é a principal função da primeira, isto é, a comunicação se estabelece mediante a linguagem utilizada. Portanto, uma boa comunicação se dá pela

qualidade da linguagem desenvolvida no processo de ensino (FELICITTI, 2010, p.36).

Portanto, através da linguagem o professor introduz o conteúdo matemático. Contudo, não cabe só ao professor apresentar e formalizar o conteúdo matemático em sala de aula, é importante que ele identifique e considere o conhecimento e as ideias prévias dos alunos em relação ao conteúdo. Assim ele saberá se esse conhecimento e essas ideias serão propulsores ou obstáculos para a aprendizagem.

Por sua aprendizagem exigir constante uso do raciocínio e por forçar o aluno a pensar e abstrair fórmulas abstratas que não fazem sentido imediato para ele, a Matemática é considerada difícil tanto por alunos, quanto por professores (CUNHA, SILVA, 2012, p.1-2). Dessa maneira, a literatura revisada revela que há um consenso acerca da elevada complexidade e dificuldade no ensino e na aprendizagem da disciplina Matemática. Assim:

As dificuldades encontradas por alunos e professores no processo ensino aprendizagem da matemática são muitas e conhecidas, por um lado, o aluno não consegue entender a matemática que a escola lhe ensina, muitas vezes é reprovado nesta disciplina, ou então, mesmo aprovado, sente dificuldades em fazer relações com o dia a dia daquilo que a escola lhe ensinou. Em síntese, não consegue efetivamente ter acesso a esse saber de fundamental importância. Do outro lado, o professor tem consciência de que não atingiu resultados satisfatórios (SANTOS, 2017, p.1).

Isso associado ao fato de que os alunos encontram grande dificuldade em assimilar e transportar para o seu dia a dia os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula, faz com que essa disciplina seja frequentemente eleita como a mais chata (CUNHA, SILVA, 2012, p.1-2).

Assim como a Metafísica, a Matemática possui o caráter de ser um campo de abstrações, distante da realidade e das experiências concretas. Por causa dessa falta de aplicabilidade prática, muitas pessoas tornam-se “obstinadamente rebeldes a todo pensamento abstrato, por isso retrocedem diante do menor raciocínio matemático” (DIEUDONNÉ, 1968, p. 42).

A Matemática ocorre em várias aplicações diárias sem que nos apercebamos disso. Mesmo assim, muitos alunos se perguntam, indignados, qual a utilidade de determinados conceitos aprendidos em sala de aula. De fato, a dinâmica das aulas pode não atender, em exemplos práticos, a curiosidade, a criatividade e a sagacidade próprias dos alunos. Isso os distancia de sua compreensão do mundo real (OLIVEIRA, 2017, p.23).

Todavia, não podemos deixar de reinterar que resquícios da reforma baseada na “Matemática Moderna” como a “ênfase acentuada na linguagem de conjuntos” e na formalidade excessiva como são apresentadas algumas partes do conteúdo matemático trabalhado em sala de aula, persistem até os dias atuais (ÁVILA, 1993, p.1).

A Matemática, em particular, depende muito de sua linguagem e simbolismo específicos. Mas é também a linguagem e o simbolismo próprios da Matemática que a fazem tão inacessível, principalmente ao leigo, mesmo ao “leigo erudito”. Assim, podemos dizer, em certo sentido, que a linguagem e o simbolismo da Matemática são um “mal necessário” (ÁVILA, 1993, p.1).

No entanto, Ávila (1993, p.1-3), defende que a introdução da linguagem e do simbolismo só deve ser realizada para auxiliar o entendimento de conteúdos indispensáveis, pois o que incentiva os alunos são as ideias e o aguçamento da curiosidade.

Portanto, por meio dessa prática, o processo de ensino-aprendizagem da matemática perverte-se em uma mera transmissão de conhecimentos da educação tradicional, fundamentado em formalismos demasiados, na memorização e repetição de modelos, técnicas e regras desprovidas de sentido, das quais, conseqüentemente, os alunos acabam esquecendo (D’AMBROSIO, 1989, p.15-19; SANTALÓ, 1996, 15-17; SANTOS, 2017, p.1).

Percebemos também que essa forma tradicional de ensino matemática em sala de aula, ministra a disciplina por meio da exposição de conceitos, leis e fórmulas que, muitas vezes estão desarticuladas entre si e utilizadas em situações artificiais que, muitas vezes, não fazem sentido para os alunos. Dessa maneira, a linguagem matemática representada por essas fórmulas é ensinada de forma desvinculada do seu significado efetivo (CERCONI, MARTINS, 2014, p.1-3).

Tanto que, a literatura aponta que, de um modo geral, desde o Ensino Fundamental, mais de metade dos alunos matriculados passam de ano sem, no entanto, assimilarem de fato o conteúdo proposto pela disciplina de Matemática. Em outras palavras, os alunos avançam no processo de escolarização, sem aprenderem realmente a disciplina (FAGUNDO, 2017, p.12-13).

Em geral, quando chega ao Ensino Médio, o aluno não tem o embasamento teórico adequado para dar continuidade ao pensamento matemático que, por sua vez, desenvolve-se por meio de uma estrutura própria, em que a cada série o conhecimento escolar é ampliado em relação à série anterior (FELICITTI, 2010, p.32). Dessa maneira:

Se o aluno proviesse do Ensino Fundamental apto a pensar matematicamente, com os conteúdos matemáticos trabalhados no todo e não estanques entre si, como também associados à realidade, a manipulação dos conteúdos matemáticos no Ensino Médio, seria um processo natural de conhecimentos matemáticos mais avançados, visto que o aluno teria

maturidade cognitiva para tal (FELICITTI, 2010, p.33).

Dessa maneira, muitos alunos chegam ao Ensino Médio, conseguindo resolver apenas exercícios manipulativos e descontextualizados, o que dificulta a aprendizagem da matemática nesse nível de ensino e favorece.

Comumente, não constatamos o estabelecimento de uma associação entre a Matemática escolar e a Matemática utilizada no cotidiano, por parte do aluno. Alunos possuem dificuldade de pensar matematicamente e mesmo conseguindo manipular a Álgebra e a Aritmética, eles possuem limitações na sua aplicação em situações do dia a dia. Mesmo os alunos com melhor desempenho na disciplina ainda possuem uma visão limitada sobre ela. Dessa maneira, podemos concluir que a Matemática escolar é trabalhada de forma algebrista (decorada excessivamente por meio de repetições sem sentido) e instrucionista, de forma descontextualizada, desarticulando o pensar, do compreender e do fazer (FELICITTI, 2010, p.34-35).

Quanto ao algebrismo mencionado, pode-se defini-lo como um conjunto de conceitos desconectados; de problemas difíceis e sem utilidade; de cálculos numéricos enormes, rebuscados de artifícios, com pouca serventia para o mundo real. A Matemática assim trabalhada serve apenas para parecer complexa e inacessível (FELICITTI, 2010, p.35).

Entendemos aqui que, embora a Álgebra seja importante, a sua manipulação de forma descontextualizada afasta a matemática daquilo que a torna atraente. Atividades que manipulam conteúdos matemáticos de forma descontextualizada, tornam esses conteúdos pouco interessantes para os alunos. Essas atividades podem até fazer com que os alunos memorizem informações, mas não aprendem o conteúdo e tais informações são perdidas rapidamente.

A prática algebrista é favorecida pela rotina, pois a característica memorística desta última – baseada extensa repetição de conjuntos de algoritmos e exercícios de resolução/aplicação semelhantes – favorece a improvisação em detrimento da preparação das aulas. Muitos professores de Matemática declaram não preparar as aulas, pois já sabem tudo de cor, e isso tende a se perverter em aulas pouco dinâmicas, marcadas pela mesmice e, conseqüentemente, tornando o conteúdo desinteressante para os alunos.

Todavia, antes de prosseguirmos com a discussão, é importante esclarecermos a posição dos professores em relação ao simbolismo e à linguagem matemática adotada nos conteúdos disciplinares constantes nos livros didáticos:

A maioria dos professores concorda com o que é relevante no ensino da Matemática não tem nada a ver com linguagem de conjuntos e seu simbolismo. No entanto, sua eliminação depende de fatores que vão desde os cursos de licenciaturas nas universidades, nos quais os docentes não se dispõem a implantar as mudanças; de concursos públicos e vestibulares que continuam contemplando esse conteúdo (DIAS, 2017, p.79).

O DESENVOLVIMENTO DA MATOFOBIA DURANTE O PROCESSO DE ESCOLARIZAÇÃO

Conforme já foi mencionado, a Matemática é considerada uma disciplina universal e obrigatória na maioria dos países, devido ao reconhecimento das contribuições históricas do conhecimento matemático para o desenvolvimento da humanidade. Entretanto, desde as séries iniciais, frequentemente, a Matemática torna-se a disciplina cujo conteúdo os alunos possuem maior aversão (CUNHA, SILVA, 2012, p.1-2).

Um estudo realizado com alunos das séries iniciais do sistema de ensino público constatou que apenas uma pequena quantidade de alunos sente prazer

em aprender e em estudar matemática. Uma quantidade maior de alunos se sente fracassada e incapaz, apresentando uma espécie de “bloqueio” ou “resistência” na aprendizagem da disciplina. A maioria dos alunos considera a disciplina difícil e esforça-se para aprendê-la por necessidades relacionadas ao sucesso e progresso no processo de escolarização e à futura obtenção de uma boa colocação profissional, para qual acredita-se que o conhecimento matemático é indispensável (SILVA, 2008, p.159)

Segundo Fagundo (2017, p.11), geralmente, as crianças gostam de matemática, porém essa afinidade vai declinando paulatinamente ao longo dos anos de escolarização, podendo inclusive se converter em aversão à disciplina. Felicitti (2010, p.32-33) sustenta a hipótese de que a expectativa e o medo criado em torno da Matemática escolar (não por aquela que, bem ou mal utilizam cotidianamente) pelo meio, faz com que crianças jovens e adultos desenvolvam, inconscientemente, um “bloqueio” em relação a tudo aquilo que pareça ou envolva a disciplina.

A *Matafobia*, melhor dizendo, o medo da Matemática e de tudo aquilo que conscientemente se percebe estar relacionado a ela, estende-se à aprendizagem da disciplina o quê, acaba tornando o processo de ensino-aprendizagem da disciplina complexo e doloroso. Como a forma como a Matemática é trabalhada em sala de aula não contribui para desmistificar essa complexificação, essa fobia acomete os alunos série a série na sua trajetória escolar, fazendo com que o bloqueio em relação à disciplina se consolide e se intensifique (FELICITTI, 2010, p.32).

Na prática docente, esse medo da matemática se torna mais perceptível para nós a partir da primeira série do Ensino Médio. Um número significativo de alunos dessa série apresenta uma reação negativa ao terem que estudar a disciplina e resistem ao aprendê-la. As atividades são efetuadas pelos alunos não para compreender o conteúdo, mas sim visando a prova e a

nota, como se a disciplina só servisse para “passar de ano” (FELICITTI, 2010, p.34).

A FORMAÇÃO E A PRÁTICA DOCENTE EM MATEMÁTICA

Notamos que, mesmo sem centralizar as ações e sem ensinar ao aluno, o professor é uma peça fundamental para o processo ensino aprendizagem, sendo ele o responsável por estimular, controlar o ritmo e mediar a aprendizagem do aluno, o qual é a figura central do processo. Além de técnicas baseadas na destreza e no conhecimento, a competência docente inclui atitudes, comportamentos e valores, que consistem em particularidades do profissional do magistério. Ser professor consiste em responder às inquietudes e questionamentos relacionados à sua atividade profissional, investigar o conjunto de saberes e normas do seu trabalho, estar aberto à renovação da aprendizagem e programar o seu próprio desenvolvimento profissional (FELICITTI, 2010, p.33-34).

Para Felicitti (2010, p.35) o algebrismo pode estar ligado à formação matemática dos professores que, muitas vezes, está aquém do necessário para ministrar os conteúdos matemáticos em sala de aula. De um modo geral, trabalhar os conteúdos matemáticos de forma contextualizada e de maneira holística em relação às demais disciplinas é difícil até mesmo para professores com formação específica, que dirá para aqueles com formação geral (Pedagogia) e para aqueles com Magistério (a formação mínima necessária para atuar nas séries iniciais).

Portanto, os professores algebristas não podem ser considerados conceitualmente nem Matemáticos nem Professores de Matemática, pois a forma como trabalham os conteúdos matemáticos não lhes permite desenvolver cientificamente a matemática à medida que apenas repetem-nos para a memorização, nem permitem que a matemática seja utilizada como um meio para educar os alunos, na medida que transmite um conhecimento descontextualizado e pouco aplicável

cotidianamente. Na verdade, como já mencionamos, os professores que aderem ao algebrismo acabam contribuindo para o desenvolvimento de sentimentos e atitude negativa em relação à Matemática por parte de seus alunos (FELICITTI, 2010, p.35).

Fiorentini e Lorenzato (2006 *apud* FELICITTI, 2010, p.35) também fazem a distinção entre o Matemático e o Professor de Matemática. Para o primeiro, o estudo dos conteúdos formais da Matemática é um fim em si mesmo, tentando produzir novos conhecimentos e ferramentas para o desenvolvimento da matemática enquanto Ciência Formal. Para o segundo a disciplina matemática é um meio para a formação do aluno, ou seja, ele promove a Educação por meio da Matemática.

Complementarmente, Saviani (2009, p.147-150) destaca que há uma distinção na formação docente existente entre os professores formados em Licenciatura em uma matéria específica que atuam no Ensino Médio e aqueles formados em Pedagogia que possuem uma formação generalista que atuam nas séries iniciais. Na formação dos primeiros, prioriza-se a aquisição de conteúdos cultural-cognitivos, que posteriormente serão transmitidos aos alunos, em detrimento dos aspectos didático-pedagógicos que se limitam a um curto período do curso, consistindo em uma mera formalidade, que posteriormente seria aprimorado com a prática. Na formação do segundo tipo de professores, prioriza-se os aspectos didático-pedagógicos e ensaiasse a prática docente, sobrando pouco tempo para o aprofundamento em conteúdos específicos.

Então, deduz-se professores de licenciatura são preparados, desde a sua formação, para priorizar o conteúdo e sua transmissão em suas aulas. Em geral, eles reproduzem a formação conteudista que tiveram no período escolar no ensino superior devido à grande quantidade de conteúdos cultural-cognitivos dispostos pelos cursos superiores e, após a sua formação, dão continuidade a essa prática atuando como docentes. Saviani (2009, 147-149), sugere que durante e após a sua

formação os professores sustentam um *ethos* universitário, o que deve contribuir para a continuidade da prática conteudista, visto que os licenciados iniciam a sua docência apenas com o pouco conhecimento dos aspectos pedagógico-didáticos do magistério e com pouca experiência na prática docente.

Dessa forma fica mais fácil manter o seu *ethos* universitário e adotar o algebrismo. Conforme argumenta Felicitti (2010, p.35):

Uma influência algebrista pode estar ligada à formação do professor que, muitas vezes, está aquém do mínimo necessário. Ou por ser mais fácil algebrar perante os alunos, a pensar com eles, discutir e/ou permitir-lhes a discussão e/ou compreensão. Oportunizar compreensão requer coragem e principalmente um domínio holístico da disciplina, o qual às vezes é difícil para o professor da área, e certamente muito mais difícil para os de formação geral e aos com formação para as séries iniciais.

Também não podemos esquecer que a formação docente não se encerra na formação inicial ou em cursos de capacitação e qualificação, ela ocorre no decorrer de toda a sua atuação profissional e em sala de aula, por meio da prática docente. Entretanto, Felicitti (2010, p.36), ressalta que a experiência profissional docente não pode ceder à rotina e permitir que as aulas sejam marcadas pela característica memorista que favorece o algebrismo, por meio da improvisação de conjuntos de exercícios e algoritmos de aplicação/resolução semelhantes. Isso pode fazer com que as aulas de Matemática se tornem pouco dinâmicas e pouco interessantes. Dessa maneira:

Percebe-se que, em sala de aula, há uma imposição dos modos de sentir e de pensar elaborados em outros tempos, com a clara compreensão de uma situação que necessita de renovação, diante de sujeitos com tipos de cultura e relacionamento diversos. Ou, ainda, indivíduos que nos propõem formas de agir distintas do

antigo, trazendo uma nova proposta por vezes desconhecida, inovadora para tornar o processo mais leve e inovador. Surgiram problemas de relações entre a educação e as transformações sociais? Sim, porém devemos entender estes problemas como desafios que conduzem a como atuar na renovação de métodos e processos para fomentar o saber aliado às transformações sociais (OLIVEIRA, 2017, p.23).

Assim, entendemos que, atualmente, para a manutenção da qualidade de ensino e para alcançar resultados que deem conta de atender às necessidades emergentes um alunado diversificado, faz-se necessário que o professor procure por novos tipos de recursos educativos. Tais recursos devem enriquecer as aulas de matemática, estimular o envolvimento e o comprometimento dos educandos, além de desenvolver continuamente os seus sentimentos de cooperação e participação durante as aulas. Tendo como base essa reflexão, passemos à seção seguinte.

A CONTRIBUIÇÃO DAS TICS PARA O DESENVOLVIMENTO DO SABER MATEMÁTICO

A tecnologia, especificamente os softwares educacionais disponibiliza oportunidade de motivação e apropriação do conteúdo estudado em sala de aula, uma vez que em muitas escolas de rede pública e particular, professores utilizam recursos didáticos como lousa e giz para ministrarem suas aulas, este é um dos diversos problemas que causam o crescimento da qualidade não satisfatória de ensino, principalmente na rede estadual. (Romero, 2006, p.1).

Vale salientar que a matemática hoje é parâmetro de conhecimento, de posição social, de nível cultural, é de grande importância no desenvolvimento da tecnologia, dos indivíduos ou de uma região, pois é uma construção humana. Um dos maiores educadores matemáticos fala que:

É preciso substituir os processos de ensino que priorizam a exposição, que levam a um receber passivo do conteúdo, através de processos que não estimulem os alunos à participação. É preciso que eles deixem de ver a Matemática como um produto acabado, cuja transmissão de conteúdo é vista como um conjunto estático de conhecimentos e técnicas. (D'Ambrósio, 2003).

Quando se fala em saber matemático, fala-se de movimento, temos que pensar em algo além da sala de aula, algo que venha de fora, passe pela escola de forma significativa e que produza conhecimento de verdade para ser utilizado por todos. Sabe-se que, como toda tendência de ensino as TICS não são a solução final dos problemas de ensino aprendizagem, longe disso, todas essas tendências possuem pontos fortes e limitações, o que se espera nesse texto é refletir a partir de uma experiência em sala de aula as características dessa linha de pesquisa e contribuir para futuras análises.

Empecilhos como os receios dos professores, choques culturais, problemas operacionais, por exemplo, acabam afastando as TICS das escolas, tornando-as cada dia mais obsoletas e ultrapassadas, um lugar onde os alunos não aprendem efetivamente, onde se sentem desmotivados e despreparados para um mercado de trabalho que exige cada vez mais qualificação e capacidade de raciocínio. Sobre isso Domingues ressalta que:

Nenhuma das inovações tecnológicas substitui o trabalho convencional do professor, quando se trata da resolução de problemas, tais como: estratégia como o cálculo mental, contas com algoritmos e criação de gráficos e de figuras geométricas com lápis, borracha, papel, régua, esquadro e compasso que são imprescindíveis para o desenvolvimento mental. Mas que acreditamos que o professor deve inserir o contexto sobre as novas tecnologias, tais como o uso de calculadoras, planilhas eletrônicas do tipo Excel que são hoje demandas sociais. Portanto o professor deveria mostrar que

esses recursos são importantes para poupar tempo de operações demoradas, como cálculos e construções de gráficos, quando o que importa é levantar as ideias as mais relevantes sobre como resolver a questão. (Domingues, 2009, 53).

O ENALTECIMENTO DA MATEMÁTICA POR MEIO DO PRAZER DE APRENDER E DA CONTEXTUALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

A necessidade de contextualização dos conceitos e exercícios de matemática é fundamental para que o aluno consiga atribuir-lhes sentido e significado, na medida que consegue aproximá-los e ver a sua aplicabilidade no cotidiano de sua realidade sociocultural. É consenso que

Os alunos aprendem melhor e com maior facilidade quando estudam os conteúdos em um contexto do mundo real, ou quando estão diretamente envolvidos com um contexto do mundo real, ou quando eles estão diretamente envolvidos com o objeto de sua aprendizagem (FELICITTI, 2010, p.33).

Para Lima (2013, p.X), os conceitos matemáticos abstratos devem ser utilizados como modelos para a análise, conclusão e previsão em situações concretas onde a experimentação é insuficiente. Sendo assim, o ensino da Matemática deve contemplar não só a conceituação e a manipulação, mas também as suas aplicações, para que o conteúdo faça sentido. Dessa maneira, deve-se apresentar a definição seguida de demonstrações e correlações e então apresentar as operações aplicadas em situações concretas e/ou contextualizadas (DIAS, 2017, p.77).

No que se refere à modelagem, por exemplo, a resolução de problemas matemáticos em sala de aula, em geral, resume-se a um conjunto de exercícios de aplicação/fixação do conteúdo, cuja responsabilidade do

aluno limita-se a identificar a conta, a fórmula ou o algoritmo de solução para a atividade (MIGUEL, 2005, p.387-390).

Assim, os alunos simplesmente aplicam mecanicamente as fórmulas decoradas e efetuam as operações necessárias para a resolução do problema, sem ter a necessidade de pensar, por si só, em possíveis resoluções para o mesmo. Isso não só desestimula ao aluno a desenvolver a sua criatividade, mas torna a matemática uma disciplina monotona e desvinculada do cotidiano dos alunos. A solução de situações-problemas deixa de ser encarada como um desafio e perde parte da sua característica lúdica e, conseqüente, torna-se uma atividade com poucas possibilidades de proporcionar prazer ao educando (MIGUEL, 2005, p.387-390).

Segundo Dias (2017, p.77) o procedimento a ser empregado na modelagem iniciase com a explicação das propriedades de cada conceito matemático e, uma vez que as mesmas sejam conhecidas pelos alunos, elas devem ser comparadas com as características do problema a ser resolvido. Depois disso, identifica-se o conceito matemático adequado para a resolução do problema e utiliza-se os métodos matemáticos a ele relacionados. Também é importante que os problemas propostos estejam relacionados ao cotidiano ou que relacionem o conceito matemático apresentado à sua aplicação em outras Ciências e Tecnologias, para que o aluno consiga atribuir-lhes significado.

Historicamente, diversos conceitos e fórmulas matemáticas foram concebidos mediante a necessidade de resolução de situações-problemas do cotidiano. Em sala de aula, contudo, inicialmente apresenta-se ao aluno todos os conceitos e as propriedades matemáticas neles envolvidas e somente depois é exposto ao aluno situações-problemas em que esses conceitos e fórmulas podem ser aplicados, geralmente, de forma repetitiva, levando aos alunos inclusive a memorizarem a forma como esses problemas são frequentemente apresentados (MIGUEL, 2005, p.387-390).

Portanto, a importância de unir a História da Matemática à modelagem permitiria ao professor propor situações-problema enfrentadas em período histórico específico, proporcionando ao aluno uma oportunidade de construir conhecimento tendo como ferramentas de resolução as mesmas condições daquela época. Dessa maneira, os alunos poderiam compreender que os conceitos matemáticos surgiram e evoluíram como respostas às necessidades e problemas individuais e sociais enfrentados pela humanidade ao longo da sua trajetória histórica (GOMES, RODRIGUES, 2014, p.6264). Segundo o PCN:

É preciso oferecer aos nossas jovens novas perspectivas culturais para que possam expandir seus horizontes e dotá-los de autonomia intelectual assegurando-lhes o acesso ao conhecimento historicamente acumulado e à produção coletiva de novos conhecimentos sem perder de vista que a educação também é, em grande medida, uma chave para os demais direitos sociais (BRASIL, 2011, p1).

De um modo geral, a literatura demonstra que uso de jogos e atividades lúdicas favoreceriam a assimilação desses conceitos historicamente adquiridos, aumentam a motivação dos alunos em aprender e a vivenciar situações concretas envolvendo a matemática, à medida que essas atividades quebrariam a “rotina da sala de aula”. Dessa maneira, não se trata somente de diversão, as atividades lúdicas em aulas de matemática possuem uma justificativa pedagógica, pois auxiliam na aprendizagem da disciplina tanto dos alunos que a encaram como uma necessidade para a progressão escolar, quanto daqueles alunos que apresentam um “bloqueio” na disciplina (REIS, NASCIMENTO, MERÇON, 2015, p.2-4). Em sala de aula, geralmente:

[...] quando são propostas atividades com jogos para os alunos a reação mais comum é de alegria e prazer pela atividade a ser desenvolvida: “– Oba! Que legal!”. O interesse pelo material no jogo, pelas

regras ou pelo proposto envolve o aluno, estimulando-o a ação. [...]. É necessário fazer mais do que simplesmente jogar um determinado jogo. O interesse está garantido pelo prazer que esta atividade lúdica proporciona, entretanto, é necessário o processo de intervenção pedagógica a fim de que o jogo possa a ser útil a aprendizagem (GRANDO, 2008, p. 24).

A literatura aponta o lúdico como um meio importante para ultrapassar as barreiras entre o ensino e a compreensão da matemática, por motivar o entendimento dos alunos de conceitos matemáticos importantes para o desenvolvimento da coerência, do raciocínio lógico e da compreensão do mundo à sua volta (CUNHA, SILVA, 2012, p.1-2). É consenso que:

A Matemática lúdica é uma ferramenta essencial pronta a atender à necessidade de elaborar pedagogicamente aulas com maior aproveitamento e entretenimento, ajudando o aluno a analisar, compreender e elaborar situações que possam resolver determinados problemas que sejam propostos pelo professor permitindo a análise e compreensão da proposição exposta pelo aluno – o resultado – e assim adquirir conhecimento, interpretar e articular métodos para argumentar e concretizar problemas (CUNHA, SILVA, 2012, p.2).

Contudo, conforme salienta Fagundo (2017, p.18), na atualidade, a importância do lúdico em sala de aula não deve e não pode ser desvinculada dos recursos tecnológicos, sobretudo daqueles decorrentes da digitalização.

Na trajetória histórica da humanidade, as inovações tecnológicas industriais e os avanços nos meios de comunicação suscitam tendências que levam a renovação de atitudes, comportamentos, ideias e posturas mentais perante a vida. O aumento da velocidade e a disseminação atual dos meios de comunicação levam a constantes mudanças de conceitos

panoramas, perspectiva, pontos de vista no sentido de uma maior integração social. As instituições, os cidadãos e os recursos naturais das nações interagem com maior frequência, assim cada indivíduo deve desenvolver-se e manifestar-se, de modo que a expressão de todos leve ao benefício comum (OLIVEIRA, 2017, p.25).

Para Gomes e Rodrigues (2014, p.60) a informática é uma tendência atual da educação matemática, levando em consideração o uso de calculadoras, computadores e outras tecnologias, com as quais a nova geração vem se familiarizando cada vez mais. Por meio de vídeos e de diversos programas digitais, o professor pode utilizar a informática para apresentar diversos problemas contextualizados, além de permitir a exibição dos diversos contextos históricos em que os saberes matemáticos se desenvolveram.

Dessa forma, percebe-se que existe a necessidade de adequação curricular em todas as etapas para que a formação do aluno em matemática e em suas diversas áreas de atuação futura possua forma estruturada e organizada, no âmbito tecnológico atual, compreendendo todo processo histórico da Humanidade para atender a vida social em que está inserido (OLIVEIRA, 2017, p.22-23).

Cerconi e Martins defendem a utilização de recursos tecnológicos no ensino de matemática, já que esses podem ser utilizados como novos ambientes de aprendizagem. Os autores enfatizam softwares disponibilizados online gratuitamente, dentre os diversos softwares disponibilizados na internet. Lês salientam a importância da aplicação de jogos em sala de aula, destacando o uso de jogos virtuais. Entretanto, os autores também destacam que, apesar da sua aplicabilidade em sala de aula, grande parte dos educadores não domina o uso instrumental e pedagógico da informática e de outras tecnologias digitais (CECONI, MARTINS, 2014, p.9-11).

A GEOGEBRA COMO INSTRUMENTO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Outra concepção que merece reconhecimento é a utilização do Geogebra. A sociedade contemporânea tem em sua composição pessoas com conhecimento de recursos tecnológicos inclusive do uso do computador e, em se tratando da educação, não é diferente. Vive-se numa via de mão dupla visto que boa parte dos alunos detém esse conhecimento, enquanto que a maioria dos professores não teve esse contato em sua formação inicial, tiveram apenas noções básicas e pouca ou nenhuma metodologia de aplicabilidade dessa ferramenta, se quer conhecem Softwares com aplicações voltadas a educação. Nesse contexto, cabe uma preocupação com o trabalho de aperfeiçoamento dos professores, para Zulato (2002, p. 9) essa preparação não se trata apenas de um treino técnico de conhecimento e operação de programas e equipamentos, mas sim, propostas metodológicas de aplicações na prática pedagógica.

O Software educativo Geogebra - Software de matemática dinâmica, gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, entre outros, numa mesma aplicação, Segundo (NÓBRIGA, SANTOS, ARAÚJO, FERREIRA, LIMA, 2012) “é atualmente um dos softwares educativos de matemática mais utilizados no mundo”. Destacam, ainda, que várias pesquisas apontam contribuições de programas desse tipo para o ensino de Matemática. Segundo Sheffer, Bressan e Corrêa (2010, p.52) apud (NÓBRIGA, SANTOS, ARAÚJO, FERREIRA, LIMA, 2012, p. 1)

Dizem que tais recursos podem favorecer a valorização da capacidade argumentativa nas atividades matemáticas, tornando-se, na medida em que a exploração matemática acontece, um terreno vasto para experimentação, observação, demonstração, elaboração e construção de conjecturas.

Esse fato, além de tudo proporciona aos educandos momentos de interação que despertam um interesse maior, já que os mesmos passam a agir como construtores de seu próprio conhecimento. Logo, se faz necessário propostas de integração desse Software no ensino de matemática.

Com esse propósito propõe-se uma maneira de aplicação deste Software educativo, como uma ferramenta metodológica no ensino de Matemática através de demonstrações com o auxílio dos números complexos. As propostas trazem consigo, além da aplicação do Software ao ensino de matemática, uma possibilidade de utilização do laboratório de informática, uma vez que, segundo (BORBA e PENTEADO, 2007) o uso de computadores e calculadoras no ensino médio representa um dos itens integrantes que gera umas das novas Tendências metodológicas da educação matemática, cujo principal objetivo é a melhoria do ensino de matemática.

Dando como referência o Ensino de Matemática, encontra-se nas recomendações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, uma alusão concreta sobre a importância natural das calculadoras e computadores, onde as mesmas permitem a abordagem de problemas com dados reais, requerendo habilidades de seleção e análise de informações por parte do professor. Conforme os PCN,

Embora os computadores ainda não estejam amplamente disponíveis para a maioria das escolas, eles já começam a integrar muitas experiências educacionais, prevendo-se sua utilização em maior escala em curto prazo. Isso traz como necessidade a incorporação de estudos nessa área, tanto na formação inicial como na formação continuada do professor do ensino fundamental, seja para poder usar amplamente suas possibilidades ou para conhecer e analisar softwares educacionais (BRASIL, 2001, p. 47).

Ações dessa natureza proporcionarão aos educadores diversos conhecimentos e habilidades necessárias a integração dessa tecnologia a sua prática cotidiana. Em se tratando de professores que possuem certo conhecimento dos softwares educacionais, de quais, onde e como fazer uso destes em sua prática educacional, conhecimento este adquirido em sua formação inicial ou continuada, cabe aos mesmos, iniciativas para separá-los e utilizá-los de acordo com seu propósito enquanto educador. Assim, os PCN destacam que,

Quanto aos softwares educacionais é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento (BRASIL, 2001, p. 47).

Somente a partir de então os docentes poderão distinguir um melhor uso e assim consequentemente tirar um maior proveito dessa ferramenta como instrumento metodológico, possibilitando, assim, um uso efetivo dos laboratórios de informática no processo de ensino e aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo dos números complexos no Ensino Médio ainda representa um desafio significativo, tanto para professores, quanto para estudantes, especialmente no que diz respeito à construção de sentidos e à vinculação com contextos mais amplos de aplicação. A literatura educacional aponta para a relevância de metodologias que promovam a contextualização, e a visualização geométrica, na tentativa de tornar o conteúdo mais acessível, e significativo para o aluno.

Neste cenário, é fundamental refletir sobre como os conteúdos matemáticos, em especial os números complexos, são apresentados em sala de aula. A construção histórica do conceito, que atravessou séculos até alcançar sua formalização atual, mostra que as dificuldades enfrentadas por alunos e docentes fazem parte da natureza intrinsecamente abstrata do tema. Tal reflexão permite considerar que o ensino dos números complexos não deve restringir-se à manipulação algébrica, ou à extração de raízes quadradas de números negativos, mas sim explorar múltiplas formas de representação, e significação.

A abordagem geométrica, por exemplo, emerge como uma estratégia pedagógica potente, uma vez que amplia a compreensão do conceito, e favorece sua visualização. Ao utilizar recursos como o plano de Argand-Gauss, e ferramentas tecnológicas como softwares de geometria dinâmica, é possível romper com a ideia de que os números complexos são meramente “imaginários”, oferecendo ao aluno uma experiência mais concreta, e interativa com o conteúdo.

Além disso, cabe destacar a importância de alinhar o ensino dos números complexos às diretrizes curriculares, considerando o perfil dos estudantes, e seus interesses profissionais futuros. Embora o aprofundamento do tema deva ser compatível com os objetivos formativos da educação básica, é necessário criar espaços para que os alunos compreendam a relevância dos números complexos em áreas como a engenharia, a física, e as tecnologias aplicadas.

Por fim, cabe ressaltar que a efetividade do ensino desse conteúdo está diretamente relacionada à formação do professor, ao tempo disponível em sala de aula, e à integração de recursos didáticos que promovam um ensino mais significativo. Nesse sentido, a adoção de metodologias ativas, e representações múltiplas, deve ser incentivada como um caminho promissor para ressignificar o ensino dos números complexos, e ampliar o engajamento discente com a matemática.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, R. O. Circuitos em corrente alternada. 2 ed. São Paulo: Érica, 1997.

ARAÚJO, N. B. **Números complexos**: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

ÁVILA, G. O Ensino de Matemática. **Revista do Professor de matemática (RPM)**. n. 23, 1983. Disponível em: <<http://www.rpm.org.br/cdrpm/23/1.htm>>. Acesso em: 14 jan. 2019.

AZEVEDO, E. M. de. Livro didático: uma abordagem histórica e reflexões a respeito de seu uso em sala de aula. Cadernos da FUCAM. v.4, n.4. 2005. Disponível em: <<http://www.fucamp.edu.br/editora/index.php/caderno/article/view/69>>, Acesso em 29 mai. 2018.

BARROSO, J. M. (Org.) **Conexões com a Matemática**. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

BARROSO, J. M. (Org.) **Conexões com a Matemática - Manual do professor**. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 2010. ARAÚJO, Nanci Barbosa Ferreira. **Números complexos**: Uma proposta de mudança metodológica para uma Aprendizagem significativa no ensino médio. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BOMBELLI, Rafael. **L'Algebra**. 1572

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Parte III**. Brasília (DF), 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em 23 jun. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Brasília, 2001. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>>. Acesso em 23 jun. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília (DF), 2007. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em 26 jun. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores.** Brasília (DF): MEC, SEB, Inep, 2008. Disponível: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf>. Acesso em 26 mai. 2018.

BRASIL. **Guia de livros didático – PNLD 2012 – Matemática.** Brasília, 2011. Disponível em: <<http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2988-guia-pnld-2012-ensino-m%C3%A9dio>>. Acesso em 26 mai. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Matriz de referência ENEM - Matemática.** Brasília (DF), 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Acesso em 23 abr. 2019.

CARNEIRO, M. J. D.; SPIRA, M.; SABATUCCI, J. **Conteúdos Básicos Comuns - Matemática.** Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, Minas Gerais, 2007. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.aspx?&usr=pub&id_projeto=27&id_objeto=39143&id_pai=38935&tipo=txg&n1=&n2=Proposta%20Curricular%20%20CBC&n3=Ensino%20M%C3%A9dio&n4=Matem%C3%A1tica&b=s&ordem=campo3&cp=B53C97&cb=mma>. Acesso em 23 abr. 2019.

CHAGAS, J S B. **A Relevância do Ensino de Números Complexos no Ensino Médio na Opinião de Professores de Matemática.** 2013. (Dissertação de Mestrado). UENF, Campo dos Goytacases, Rio de Janeiro, 2013.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e aplicações.** v.3. São Paulo: Ática, 2010a. Referências 87

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e aplicações - Manual do professor.** v.3. São Paulo: Ática, 2010b.

DÍAZ, O. R. T. **A atualidade do livro didático como recurso curricular.** Brasília: Linhas Críticas, v. 17, n. 34, p. 609-624, 2011. CARDANO, Girolamo. **Ars Magna.** 1545.

CARNEIRO, J. P. A. **A geometria e o ensino de números complexos.** Revista do professor de Matemática. N. 55. São Paulo: RPM, 2004.

CERCONI, F. B. M.; MARTINS, M. A. Recursos tecnológicos no ensino de matemática: considerações sobre três modalidades. In: **SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 4**, 2014, Ponta Grossa. Anais... Ponta Grossa. 2014. Disponível em: <<http://sinect.com.br/anais2014/anais2014/artigos/ensino-dematemática/01409358155.pdf>>. Acesso em 14 nov 2018.

COSTA, Gilvan Luiz Machado. **Curso para professores de Ensino Médio da rede pública estadual de Santa Catarina, nas áreas de Ciências da Natureza e Matemática e suas tendências: Caderno pedagógico do cursista e Guia do curso.** Tubarão: Unisul Virtual, 2004.

CUNHA, J S; SILVA J A V. A importância das atividades lúdicas no ensino da matemática. **III EIMAT.** 1 a 3 ago 2012. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_Cunha_Jussileno.pdf>. Acesso em: 02 jun 2019

CURY, A. **Pais brilhantes, professores fascinantes.** 9 ed. Rio de Janeiro: Sextante, 2003.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. p. 15-19

DIAS, A A S. Fracasso no Ensino de Matemática na Educação Básica – a quem interessa? In.: CASTEJON, M; ROSA, R (ORG). **Olhares sobre o Ensino da Matemática na Educação Básica.** Uberaba: IFTM, 2017

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** São Paulo: Unicamp, 2004.

FAGUNDO, L M C. A importância na vinculação de “sentido” ao ensino de matemática em sala de aula. In. CASTEJON, M; ROSA, R (ORG). **Olhares sobre o Ensino da Matemática na Educação Básica.** Uberaba: IFTM, 2017

FELICITTI, V L. Linguagem na Construção Matemática. **Revista Educação por Escrito** – PUCRS, v.1, n.1, jun. 2010. Disponível em: <<http://revistaseletronicas.pucrs.br/article/view/7121/5354>>. Acesso em: 20 abr 2019.

GOMES, T. A.; RODRIGUES, C. K. A evolução das tendências da educação matemática e o enfoque da história da matemática no ensino. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v.4 n.3 set/dez 2014. Disponível <<http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/viewFile/2687/1264>>. Acesso em 14 nov 2018.

INÁCIO, A. M. A. V, MACHADO, F. e SOUZA, A. R. **A Representação Geométrica dos Números Complexos: Um olhar sobre a disciplina de trigonometria e números complexos do curso de Matemática da UNISUL/TB.** 47 folhas. Trabalho de Conclusão de Curso. (Curso de Matemática - Licenciatura) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2006.

LIMA, E. L. **A matemática do Ensino Médio: parte 1**, 2011. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=r39AUcN9KDg>>. Acesso em: 14 nov. 2019.

_____. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 289 p.

LUFT, C. P. **Minidicionário LUFT**. 20ª Ed. São Paulo: Ática, 2000.

MARCONI, Marina de Andrade & LAKATOS, Eva. **Técnicas de Pesquisa**. 5.ed., São Paulo: Atlas, 2002.

MEC. Ministério da Educação e do Desporto, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**: introdução. Brasília, 1998.

MIGUEL, J. C. **O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas**. Núcleos de Ensino: Artigos dos Projetos realizados em 2003. p.375-394, 2005. Disponível em: <<http://www.gradadm.ifsc.usp.br/dados/20121/SLC0630-1/Ensino-MatematicaEnfoque-Conceitos.pdf>>. Acesso em 14 nov 2018.

MORAIS, Regis de. **Sala de aula: que espaço é esse?** 3 ed. Campinas: Papirus, 1998.

OLIVEIRA, M. R. Ensino de Matemática na Educação Básica. CASTEJON, M; ROSA, R (ORG). **Olhares sobre o Ensino da Matemática na Educação Básica**. Uberaba: IFTM, 2017

PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2004.

REIS, S. T.; NASCIMENTO, L. C. S.; MERÇON, A. J. A importância das atividades lúdicas no processo de ensino-aprendizagem da matemática. In: **ENCONTRO CAPIXABA DE EDUCAÇÃO DE MATEMÁTICA**. 2015, Vitória. Anais...Vitória, Ifes&Ufes, 2015. Disponível em <http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ECEM/X_ECEM/paper/viewFile/1867/642>. Acesso em 14 nov. 2018.

SANTALÓ, L. A. Matemática para não-matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes médicas, 1996.p. 11-25.

SANTOS, E N F. Apresentação. CASTEJON, M; ROSA, R (ORG). **Olhares sobre o Ensino da Matemática na Educação Básica**. Uberaba: IFTM, 2017

SAVIANI, Demerval. **História das Ideias Pedagógicas no Brasil**. Campinas: Autores Associados, 2007. Coleção Memória da Educação.

SAVIANI, Demerval. "A idéia de sistema nacional de ensino e as dificuldades para sua realização no Brasil no século XIX". In.: **III Congresso Luso-Brasileiro de História da Educação**, Coimbra, 23 a 26 de fevereiro de 2000.

SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. (Orgs.). **Gêneros orais e escritos na escola**. Campinas: Mercado das Letras, 2004.

SKOVSMOSE, Ole. **Matemática em ação**. In: BICUDO, M. e BORBA, M.C. (Orgs.). Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

VERGARA, Sylvia Constant. **Projetos e Relatórios de Pesquisa em Administração**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2003.